



التمرين الأول: (06 نقاط)

يحتوي كيس على ثلاث كريات بيضاء وأربع كريات خضراء وخمس كريات حمراء (الكريات لا نفرق بينها عند اللمس)

نسحب من الكيس 3 كريات عشوائيا وفي أن واحد.

I. احسب احتمال الحوادث الآتية:

أ) A : الحصول على ثلاث كريات من نفس اللون.

ب) B : الحصول على ثلاث كريات مختلفة مثنى مثنى.

ج) C : الحصول على كرية بيضاء على الأقل.

II. نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الألوان.

1) عين قيم المتغير العشوائي X ثم عرف قانون احتماله.

2) احسب أمله الرياضي $E(X)$ وتباينه $V(X)$ وانحرافه المعياري $\sigma(X)$.

التمرين الثاني: (06 نقاط)

اجب بصحيح أو خطأ في كل حالة مع التعليل (الإجابة غير المبررة لا تؤخذ بعين الاعتبار):

(1) من أجل كل عدد طبيعي n . العدد 3 يقسم $2^{2n} - 1$.

(2) إذا كان العدد الصحيح x حل للمعادلة $x^2 + x \equiv 0 [6]$ فإن $x \equiv 0 [3]$.

(3) الثنائيات الصحيحة $(x; y)$ حلول المعادلة $12x - 5y = 3$ هي $(10k + 4; 24k + 9)$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

(4) توجد ثنائيات وحيدة من الأعداد الطبيعية $(a; b)$ بحيث إذا كان $a < b$ فإن $PPCM(a, b) - PGCD(a, b) = 1$

(5) العددان الطبيعيان M و N حيث M يكتب في النظام العشري abc و N يكتب في النظام العشري bca .

إذا كان M مضاعف للعدد 27 فإن $M - N$ مضاعف لـ 27 .



التمرين الثالث: (08 نقاط)

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{8(u_n - 1)}{u_n + 2} \end{cases}$$

- I. نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على \mathbb{N} حيث:
- 1) اثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $2 < u_n < 4$.
 - 2) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم بين أنها متقاربة.
 - 3) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $4 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(4 - u_n)$.
 - 4) استنتج أن: $4 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$ من أجل كل عدد طبيعي n . ثم حدد $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

II. (v_n) المتتالية العددية المعرفة على \mathbb{N} حيث: $v_n = \frac{u_n - 4}{u_n - 2}$.

- 1) اثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول v_0 .
- 2) اكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n .
- 3) احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ واستنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ بطريقة أخرى.
- 4) احسب بدلالة n المجموعين T_n و S_n حيث:

$$T_n = \frac{1}{u_0 - 2} + \frac{1}{u_1 - 2} + \frac{1}{u_2 - 2} + \dots + \frac{1}{u_{n-1} - 2} \text{ و } S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1}$$

5) احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.



I. عدد الإمكانيات: $C_{12}^3 = 220$

$$P(A) = \frac{C_5^3 + C_4^3 + C_3^3}{220} = \frac{3}{44} : P(A) \text{ حساب (أ)}$$

$$P(A) = \frac{C_5^1 \times C_4^1 \times C_3^1}{220} = \frac{3}{11} : P(B) \text{ حساب (ب)}$$

$$P(C) = \frac{C_3^1 \times C_9^2 + C_3^2 \times C_9^1 + C_3^3}{220} = \frac{136}{220} = \frac{34}{55} : P(C) \text{ حساب (ج)}$$

II. (1) قيم المتغير العشوائي X

$$X \in \{1; 2; 3\}$$

قانون الاحتمال:

$$P(X = 1) = P(A) = \frac{3}{44}$$

$$P(X = 3) = P(B) = \frac{3}{11}$$

$$P(X = 2) = 1 - \frac{3}{11} - \frac{3}{44} = \frac{29}{44}$$

$$E(X) = \frac{97}{44} : \text{الأمّل الرياضيائي}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 0,54 \text{ الانحراف المعياري } V(X) = \frac{584}{1936} = 0.30 \text{ التباين}$$



التمرين الثاني:

(1) صحيح: التعليل $4 \equiv 1[3]$ ومنه $(2^2)^n \equiv 1^n[3]$ وبالتالي $2^{2n} - 1 \equiv 0[3]$

(2) خطأ التعليل: $x^2 + x = x(x+1)$

$$x^2 + x = x(x+1)$$

$x^2 + x \equiv 0[3]$ يكافئ $x+1 \equiv 0[3]$ أو $x \equiv 0[3]$ أي أن $x \equiv 2[3]$ أو $x \equiv 0[3]$.

(3) خطأ: $12x - 5y = 3$ لدينا (4;9) حل خاص للمعادلة

5 يقسم $12(x-4)$ و 5 و 12 أوليان فيما بينهما. حسب مبرهنة غوص 5 يقسم $x-4$ ومنه $x = 5k + 4$ و $y = 12k + 9$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

(4) صحيح: التعليل نضع $a = da'$ و $b = db'$ حيث $d = PGCD(a; b)$ و $PGCD(a'; b') = 1$

ومنه $PPCM(a; b) = da'b'$ بالتعويض في المعادلة نجد: $d(a'b' - 1) = 1$ ومنه d يقسم 1 وبالتالي $d = 1$

ومنه $PPCM(a; b) = ab$ إذن $ab - 1 = 1$ ومنه $ab = 2$ الثنائيات المحققة (2;1) و (1;2) وبما أن $a < b$ فإن الثنائية الوحيدة (1;2)

(5) صحيح: التعليل

$$M = 100a + 10b + c = 27k \text{ و } N = 100b + 10c + a \text{ حيث } k \in \mathbb{N}$$

$$M - N = 9(11a - 10b - c) = 9(11a + 100a - 27k) = 27(37a - k)$$

ومنه $M - N$ مضاعف لـ 27



التمرين الثالث:

I.

(1) البرهان بالتراجع أن: $2 < u_n < 4$ من أجل كل عدد طبيعي n . نسمي الخاصية $P(n)$. نتحقق من صحة $P(0)$: $u_0 = 3$ و $2 < 3 < 4$ محققة.

نفرض صحة $P(n)$ ونبرهن صحة $P(n+1)$ من أجل كل عدد طبيعي n

$$u_{n+1} = 8 - \frac{24}{u_n + 2} \text{ حيث } 2 < u_{n+1} < 4 \text{ ونبرهن } 2 < u_n < 4 \text{ نفرض}$$

$$2 < u_n < 4 \text{ بإضافة } 2 \text{ نجد } 4 < u_n + 2 < 6 \text{ ومنه } -4 < \frac{-24}{u_n + 2} < -6 \text{ ومنه } 2 < u_{n+1} < 4 \text{ من أجل كل عدد}$$

طبيعي n . ومنه $2 < u_n < 4$

$$(2) \quad u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n - 2)(u_n - 4)}{u_n + 2} \text{ ومنه } u_{n+1} - u_n > 0 \text{ وبالتالي } (u_n) \text{ متزايدة.}$$

(u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة.

$$(3) \quad 4 - u_{n+1} = \frac{4(4 - u_n)}{u_n + 2} \text{ لدينا } (u_n) \text{ متزايدة وحدها الأول } u_0 = 3 \text{ ومنه } 3 \leq u_n$$

$$\text{لدينا } 3 \leq u_n \text{ ومنه } \frac{1}{u_n + 2} \leq \frac{1}{5} \text{ وبالضرب في } 4(4 - u_n) \text{ نجد } 4 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(4 - u_n).$$

$$(4) \text{ لدينا: } 4 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(4 - u_n) \text{ ومنه}$$

$$4 - u_1 \leq \frac{4}{5}(4 - u_0)$$

$$4 - u_2 \leq \frac{4}{5}(4 - u_1)$$

...

$$4 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n (4 - u_0) \text{ بالضرب طرف الى طرف نجد:}$$



لدينا $0 < 4 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = 0$ ومنه $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4 - u_n = 0$ وبالتالي $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$.

II

(1) إثبات أن (v_n) متتالية هندسية.

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 4}{u_{n+1} - 2} = \frac{8 - \frac{24}{u_n + 2} - 4}{8 - \frac{24}{u_n + 2} - 2} = \frac{4u_n - 16}{6u_n - 12} = \frac{4}{6} v_n$$

الأول $v_0 = -1$

(2) عبارة الحد العام: $v_n = -\left(\frac{2}{3}\right)^n$

$$u_n = 2 - \frac{2}{v_n - 1} = 2 + \frac{2}{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1} \quad \text{ومنهم } v_n = 1 - \frac{2}{u_n - 2}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 + \frac{2}{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1} = 4 \quad \text{ومنهم } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} -\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 \quad (3)$$

$$S_n = -\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}} = -3\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) \quad \text{حساب } S_n \quad (4)$$

$$\frac{1}{2}(1 - v_n) = \frac{1}{u_n - 2} \quad \text{لدينا } T_n = \frac{1}{2}(1 - v_0 + 1 - v_1 + \dots + 1 - v_{n-1}) \quad \text{ومنهم } v_n = 1 - \frac{2}{u_n - 2}$$

$$T_n = \frac{1}{2}(n - S_n) = \frac{1}{2}\left(n + 3\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)\right) \quad \text{وبالتالي } T_n = \frac{1}{2}(1 - v_0 + 1 - v_1 + \dots + 1 - v_{n-1})$$